2.5 Abschnittsweise definierte Funktionen, Betragsfunktion, Signumfunktion

Gelegentlich benötigt man Funktionen, die auf den Teilintervallen des Definitionsbereichs durch verschiedene Terme definiert werden **(abschnittsweise definierte Funktionen)**.

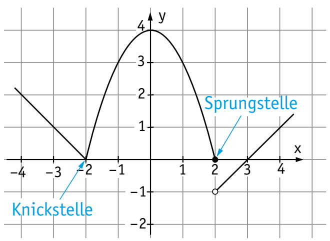
Beispiel 1

Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{für } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ x-3 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

D_f zerfällt in drei Teile: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, -2[\cup [-2, 2] \cup]2, \infty[$. Bei der Definition einer solchen Funktion muss man wegen der Eindeutigkeitsforderung für eine Funktionsvorschrift darauf achten, dass sich die Intervalle nicht überlappen (oder wenn sie es doch tun, dass im Überlappungsbereich die Terme dieselben Werte liefern).

Das Bild zeigt den Graphen von f. Bei $x = 2$ ist der Term $4 - x^2$ zuständig, also ist $(2 \mid 0)$ ein Punkt des Graphen (ausgefüllt gezeichnet), der Punkt $(2 \mid -1)$ jedoch nicht (hohl gezeichnet). Diese Schwierigkeit hat man bei $x = -2$ nicht, da $-x - 2$ (nicht zuständig) und $4 - x^2$ (zuständig) denselben Wert, nämlich 0, liefern. Der Graph hat bei $x = -2$ eine Knickstelle und bei $x = 2$ eine Sprungstelle.



Als wichtigstes Beispiel für eine abschnittsweise definierte Funktion hat man die **Betragsfunktion**.

Definition der Betragsfunktion

Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man die Betragsfunktion durch

$$\text{abs: } x \mapsto |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

Die Bezeichung abs steht für **absoluter Betrag**.

Die Betragsfunktion nimmt einer Zahl ihr Vorzeichen:

$|0| = 0, \quad |3| = 3, \quad |-7| = -(-7) = 7$

Stets gilt daher: $|x| \ge 0$ **für alle** $x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0$ **nur für** $x = 0$

Die **Signumfunktion** (Vorzeichenfunktion) ist das Gegenstück zur Betragsfunktion. Sie reduziert eine Zahl auf ihr Vorzeichen -1 bzw. 0 bzw. $+1$. Wir haben sie im Vorgriff schon in → *Kapitel „Grundlagen", Abschnitt 3.6* verwendet.

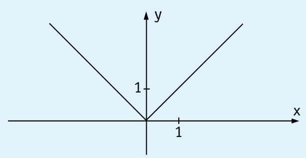
Definition der Signumfunktion

Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man die Signumfunktion durch

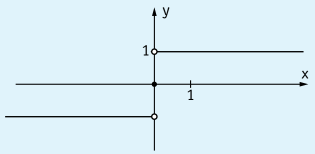
$$\text{sgn: } x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Wenn man einer Zahl ihr Vorzeichen nimmt (Betragsfunktion) und es dann wieder anbringt (Multiplikation mit der Signumfunktion), erhält man die Zahl zurück. Und wenn man eine Zahl mit ihrem Vorzeichen multipliziert, ist es, als würde man dieses entfernen. Es gelten daher

$|x| \cdot \text{sgn}(x) = x$ **für alle** $x \in \mathbb{R}$; $x \cdot \text{sgn}(x) = |x|$ **für alle** $x \in \mathbb{R}$



Graph von $x \mapsto |x|$



Graph von $x \mapsto \text{sgn}(x)$

Der Graph der Betragsfunktion hat bei $x = 0$ eine Knickstelle, der der Signumfunktion eine Sprungstelle. Weder $(0 \mid -1)$ noch $(0 \mid 1)$ gehört zum Graphen der Signumfunktion, dagegen $(0 \mid 0)$.

Funktionen mit Beträgen kann man betragsfrei schreiben, indem man eine abschnittsweise Definition herstellt. Dazu zwei Beispiele. Wir beschränken uns dabei auf lineare Terme.