2 Schnitt zweier Ebenen

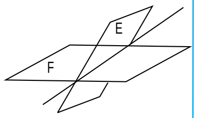
Zwei zueinander geneigte Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Stehen die Ebenen parallel zueinander, gibt es keine gemeinsamen Punkte. Beim trivialen Fall sind die Ebenen identisch, liegen also ineinander. Wie man die Schnittmenge in den jeweiligen Fällen rechnerisch bestimmt, wird im Folgenden gezeigt.

Profi-Tipp

Die Schnittmenge zweier Ebenen wird am einfachsten mithilfe der beiden Koordinatengleichungen berechnet. Die Berechnung mit den Parameterformen ist unverhältnismäßig aufwendig.

Beispiele

Beispiel 1: die Ebenen schneiden sich in einer Geraden



Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden zwischen den Ebenen

E: $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 31$ und F: $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7$

1. Schritt: Aufstellen eines Gleichungssystems

Da die Punkte der Schnittmenge gleichzeitig auf beiden Ebenen liegen, müssen deren Koordinaten auch beide Ebenengleichungen erfüllen. Diese Bedingung führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} E: & 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 31 & (I) \\ F: & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 & (II) \end{array}$$

2. Schritt: Lösen des Gleichungssystems

Ein LGS, das aus zwei Gleichungen und drei Variablen besteht, wird am einfachsten mit dem Additionsverfahren gelöst (→ *Kapitel „Lineare Gleichungssysteme in der analytischen Geometrie"*):

$$\begin{array}{rl} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 31 & (III) \\ -4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -14 & (IV) = (II) \cdot (-2) \\ \hline 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 31 & (V) \\ 4x_2 - x_3 = 17 & (VI) = (III) + (IV) \end{array}$$

Da in Gleichung (VI) eine Variable frei wählbar ist, hat dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Um die Lösungsmenge anzugeben, setzt man für eine der zwei x-Koordinaten in Gleichung (VI) die Variable t ($t \in \mathbb{R}$) und drückt anschließend die beiden anderen Variablen in Abhängigkeit von t aus. Mit $x_2 = t$ folgt durch Einsetzen in Gleichung (VI) $4x_2 - x_3 = 17$ für x_3:

$$\begin{array}{ll} 4t - x_3 = 17 & \mid + x_3 - 17 \\ 4t - 17 = x_3 \text{ bzw. } x_3 = -17 + 4t & \end{array}$$

Durch Einsetzen von $x_2 = t$ und $x_3 = -17 + 4t$ in Gleichung (V) $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 31$ folgt für x_1:

$$\begin{array}{rl} 4x_1 - 2t - 17 + 4t = 31 & \\ 4x_1 + 2t - 17 = 31 & \mid + 17 - 2t \\ 4x_1 = 48 - 2t & \mid :4 \\ x_1 = 12 - 0{,}5t & \end{array}$$

3. Schritt: Deutung der berechneten x-Koordinaten als Schnittgerade

Betrachtet man die berechneten x-Koordinaten als Komponenten eines Vektors, der die Lage der Schnittpunkte beschreibt, folgt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 0{,}5t \\ t \\ -17 + 4t \end{pmatrix}$$

Durch Aufspalten in eine Summe aus zwei Vektoren ergibt sich:

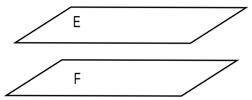
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 - 0{,}5t \\ t \\ -17 + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5t \\ t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Genau das ist die Parameterform einer Geraden (→ *Kapitel „Geraden-/Ebenengleichung", Abschnitt 1*). Die gesuchte Schnittmenge ist also eine Gerade.

Ergebnis:

Die Ebenen schneiden sich in der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Beispiel 2: parallele Ebenen



Bestimmen Sie die Schnittmenge zwischen den Ebenen:

E: $9x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 5$ und

F: $3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1$

1. Schritt: Aufstellen eines Gleichungssystems

$$\begin{array}{lll} E: & 9x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 5 & (I) \\ F: & 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 & (II) \end{array}$$

2. Schritt: Lösen des Gleichungssystems

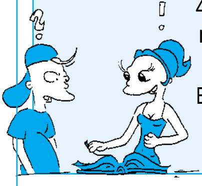
$$\begin{array}{rll} 9x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 5 & & \text{(III)} \\ -9x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 3 & & \text{(IV)} = \text{(II)} \cdot (-3) \\ \hline 9x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 5 & & \text{(V)} \\ 0 = 8 & & \text{(VI)} = \text{(III)} + \text{(IV)} \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung, da unabhängig von der Wahl der x-Koordinaten immer die falsche Aussage $0 = 8$ herauskommt.

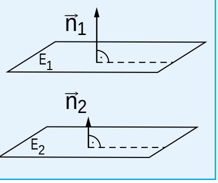
Ergebnis:

Es gibt keinen gemeinsamen Punkt zwischen E und F:
$E \cap F = \{ \}$. Das heißt: Beide Ebenen sind parallel zueinander.

Profi-Tipp



Zwei parallele Ebenen erkennt man auch daran, dass der Normalenvektor $\vec{n}_1$ der einen Ebene ein Vielfaches des Normalenvektors $\vec{n}_2$ der anderen Ebene ist.



Beispiel 3: identische Ebenen

Bestimmen Sie die Schnittmenge der Ebenen E und F:

E: $-12x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14$ und F: $6x_1 - x_2 - 5x_3 = -7$

1. Schritt: Aufstellen eines Gleichungssystems

$$\begin{array}{lll} \text{E: } -12x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 & & \text{(I)} \\ \text{F: } \quad 6x_1 - x_2 - 5x_3 = -7 & & \text{(II)} \end{array}$$

2. Schritt: Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rll} -12x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 & & \text{(III)} \\ 12x_1 - 2x_2 - 10x_3 = -14 & & \text{(IV)} = \text{(II)} \cdot 2 \\ \hline -12x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 & & \text{(V)} \\ 0 = 0 & & \text{(VI)} = \text{(III)} + \text{(IV)} \end{array}$$

Die Lösung sind also all diejenigen Punkte, deren Koordinaten die Gleichung (V) erfüllen. Das ist die Ebene E. Wenn aber die Ebene E die Schnittmenge ist, muss die andere Ebene F mit ihr identisch sein.

Ergebnis:

Die Ebenen E und F sind identisch: $E \cap F = \{E\} = \{F\}$.